# 5. Random Surface の数と String

東大・理　　川　合　　光

## § 0. はじめに

Random Walk の問題とは空間の中のある種の曲線全体について何らかの量をたし上げる事であった。この問題はスピン系の統計力学と同等であり，定性的な性質はほぼ解明されているといえる。この問題の次元を1つ上げて空間の中のある種の曲面全体についてのたし上げを考えるのが random surface の問題である。この問題はゲージ系の統計力学と同等であり，また紐の量子化，表面張力の模型，重力の量子化などいろいろな物理現象と関係しているので，現代の数理物理学上の大きな問題の1つである。

この問題に対する approach としては次の2つのものが考えられる。

1) 連続空間の中で面の functional measure をうまく決める。

2) 格子化された空間の中で面を1つずつ数える。

ここでは素朴な 2) の立場をとることにする。

## § 1. Random surfaceの数

格子化された空間の中に contour $C$ を考え，$C$ を境界として $A$ 枚の plaquette からなる連結な面の数を $n(A\,;\,C)$ とかく。ここで面としてどのようなものを考えるかによっていろいろな random surface の問題ができるが，以下では主に planar random surface について考える。これは次の式で定義される。

$$\sum_{A=0}^{\infty} \lambda^A n(A\,;C) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{Z(N,\ \lambda)} \int [dU]\ e^{-S} W(C)$$

ここで $S$ は Weingarten の action であり，

$$S = -\lambda N \sum_{\text{plaquette}} \mathrm{Tr}\,(UUUU) + N \sum_{\text{link}} \mathrm{Tr}\,(UU^{\dagger})$$

$U_{n,\mu} \in M(N\,;\boldsymbol{C})$ は link 上にある Matrix 変数であり，$W(C)$ は Wilson loop である。

$$W(C) = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,(UU\cdots U)$$

幾何学的には，1つの plaquette を多価的にみなしたときの planar な面を考えているわけである。

以下で $n(A\,;\,C)$ のふるまいを調べる。

## § 2. Random walk のまとめ

Random surfaceは面として閉じているという constraint があるので本質的に freeではありえない。そのための analogy として interacting random walkを考えるのが適切である。

格子化された空間の中で点 $x$ から点 $y$ まで $L$ step でつなぐpathの数を $n(L\,;\,x-y)$ とかく。必ずしもpathは freeではなく self interaction があってもいいものとする。$L$ を大きくしたとき次の漸近形が予想される。

$$n(L\,;\,x-y) \underset{L\text{大}}{\rightarrow} L^{-b}\,\alpha^{L}\,F((x-y)^2,\,L)$$

ここで $F$ は $x-y$ を固定して $L\to\infty$ のとき $\to$ constとなるような函数である。さらに $F$ には次の漸近的なscaling則が予想される。

$$F = f\left(\frac{(x-y)^2}{L^{\frac{1}{d_{\mathrm{H}}}}}\right) \qquad (\,L\text{ 大のとき}\,)$$

ここで $d_{\mathrm{H}}$ をこの random walk のHausdorf次元とよぶ。

次のGreen 函数をつくると

$$G(x-y\,;K) = \sum_{L=0}^{\infty} K^{L}\,n(L\,;\,x-y)$$

$K\alpha=1$ が critical pointであり，それからのずれを

$K\alpha = 1-(ma)^{d_{\mathrm{H}}}$ とおくと，

$$G(x-y\,;K) = \left(\frac{1}{ma}\right)^{d_{\mathrm{H}}(1-b)}\cdot g(m^2(x-y)^2)$$

$$\text{但し}\quad g(x) \equiv \int_0^{\infty} dt\ \mathrm{e}^{-t}\,t^{-b} f\left(\frac{x}{t^{\frac{2}{d_{\mathrm{H}}}}}\right)$$

とかけ， critical exponentの関係も正しく出る。

## § 3. Random surfaceの数に対するconjecture

前節との analogy から次の conjecture が成り立つ。

$$n(A\,;\,C) \underset{A\text{大}}{\rightarrow} A^{-b}\,\alpha^{A}\quad F(A\,;\,C)$$

ここで $F(A\,;\,C)$ は $C$ を固定して $A\to\infty$ のとき$\to$ constとなるような函数であり，さらに次の漸近的なscaling則が予想される。

$$F(A\,;C)=f\Big(\frac{S}{A^{\frac{2}{d_{\mathrm{H}}}}}\Big)\qquad (A\text{大のとき})$$

ここで $S$ は $C$ を境界とする minimal surface の面積であり，$d_{\mathrm{H}}$ はこの random surface のHausdorf次元である。

次の Green 函数をつくると，

$$G(C\,;K)=\sum_{A=0}^{\infty}K^{A}n(A\,;C)$$

これは量子化された南部 action の格子における regularization になっている。

$$G(C)=\int_{\text{boundary C}}\mathcal{D}X_{\mu}(\sigma,\tau)\ \mathrm{e}^{-\rho_0\int d\sigma d\tau\sqrt{\{\frac{\partial(X_\mu,X_\nu)}{\partial(\sigma,\tau)}\}^2}}$$

ここで $\mathrm{e}^{-\rho_0 a^2}$ が $K$ に対応する。

もし，$n(A\,;C)<\alpha^{A}$ の形で bound されずに $A!$ 程度になってしまうと path integral において entropy の方が dominate して和は発散してしまい，連続極限がとれない。

## §4. いろいろな Random surface に対する bound

ここでは次の３種の Random surface について $n(A\,;C)$ の bound を与える。（証明略）

① 面を多価的に数え，しかも planar に限らないとき。

これは次の式で定義される。

$$\sum_{A=0}^{\infty}\lambda^{A}n_{\mathrm{all}}(A\,;C)=\frac{1}{Z}\int \mathrm{e}^{-S}W(C)\,[\,dU]$$

ここで　$U_{n,\mu}\in\boldsymbol{C}$ は link 上の変数であり，

$$S=-\lambda\sum_{P}UUUU+\sum_{n,\mu}U_{n,\mu}U^{*}_{n,\mu}$$

$W(C)=UU\cdots U$　は Wilson loop である。

このとき　$n_{\mathrm{all}}(A\,;C)\underset{A\text{大}}{\rightarrow}A^{A}$　のひどい発散であり，連続極限は存在しない。

② self-avoiding random surface

自分自身を２度と切らないようなsurface全体を考える。このとき次の bound が成立つ。

$$n_{\mathrm{self\,avoiding}}(A\,;C)<\{2(d-1)\}^{A}$$

③ planar random surface

定義は§1.で与えたように，自分自身と交差してもよいが Euler index 最大のものをとる。

このとき次のboundが成り立つ。

$$n_{\mathrm{planar}}(A\,;\,C)\ <\ \{48(d-1)\}^{A}$$

## §5. 終りに —— large–$N$ ゲージ系への手がかり ——

最近，次の事実がみつかった。[2] $U(N)$ ゲージ symmetry をもつ系は large–$N$ の極限で変数の数が著しくreduceしたmodelと同等である。

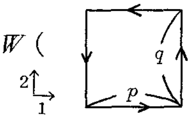
$U(N)$ − LGT

$$\underset{\text{同等}}{\leftrightarrow}\quad S=\frac{N}{g^2 N}\sum_{\mu\neq\nu}\mathrm{Tr}\,(U_\mu U_\nu U_\mu^\dagger U_\nu^\dagger)\qquad U_\mu\in U(N)\qquad(\mu=1,2,\cdots,d)$$

Weingarten

$$\underset{\text{同等}}{\leftrightarrow}\quad S=N\lambda\sum_{\mu\neq\nu}\mathrm{Tr}\,(A_\mu A_\nu A_\mu^\dagger A_\nu^\dagger)-N\sum_{\mu}\mathrm{Tr}\,(A_\mu A_\mu^\dagger)$$
$$A_\mu\in M(N\,;\boldsymbol{C})\qquad(\mu=1,2,\cdots,d)$$

すなわち，もともと lattice siteの数を $V$ として $Vd$ 個の Matrix があったmodelが $d$ 個だけの Matrix のmodelと同等なのである。ここで同等といっているのは本来の理論の Wilson loop と reduced model の Wilson loopが一致するという意味である。例えば，

$< W($  $)>_{\text{本来の理論}} = <\mathrm{Tr}\ (U_1^{p}U_2^{q}U_1^{+p}U_2^{+q})>_{\text{reduced model}}$

などである。また本来の理論の単位体積あたりのfree energyはreduced modelの free energy と一致する。

これは $d$ 個のmatrixからなる matrix model の large–$N$ 極限なのでうまくいけばとけるかもしれない。

## 参考文献


1) T. Eguchi and H. Kawai, UT–365 (1981). Number of Random Surfaces on the Lattice and the Large–$N$ Gauge Theory.

2) T. Eguchi and H. Kawai, UT–378 (1982). Reduction of Dynamical Degrees of Freedom in the Large–$N$ Gauge Theory.